

## Aufgaben: Funktionen mit zwei Variablen

### Aufgabe 1

Zeichnen Sie die angegebenen Niveaulinien der folgenden Funktionen:

$$(1) f(x, y) = x - 2 \cdot y \quad D_f = \mathbb{R}^2 \quad \bar{z} = -2, \bar{z} = 0, \bar{z} = 4$$

$$(2) f(x, y) = x - y^2 \quad D_f = \mathbb{R}^2 \quad \bar{z} = 2, \bar{z} = 5$$

$$(3) f(x, y) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \quad D_{f_x} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, D_{f_y} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\} \quad \bar{z} = 1, \bar{z} = 2$$

### Aufgabe 2

Bestimmen Sie sämtliche ersten und zweiten Ableitungen.

$$(1) f(x, y) = 3 \cdot x \cdot y \quad D_f = \mathbb{R}^2$$

$$(2) f(x, y) = (x \cdot y)^3 \quad D_f = \mathbb{R}^2$$

$$(3) f(x, y) = -y^4 + 3 \cdot x^2 \cdot y + 2 \cdot x \cdot y - x \quad D_f = \mathbb{R}^2$$

### Aufgabe 3

Untersuchen Sie folgende Funktion auf Minima und Maxima:

$$f(x, y) = \frac{3}{2} \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot y + 4 \cdot y^2 + 61 \cdot x + 108 \cdot y \quad D_f = \mathbb{R}^2$$

### Aufgabe 4

Eine Firma produziert das Gut X mit Hilfe zweier Produktionsfaktoren. Dabei gilt:

- $v_1$ : Einsatzmenge von Produktionsfaktor 1,
- $v_2$ : Einsatzmenge von Produktionsfaktor 2,
- $q_1 = 4\text{€}$ : Kosten für eine Einheit von Produktionsfaktor 1,
- $q_2 = 2\text{€}$ : Kosten für eine Einheit von Produktionsfaktor 2,
- $K_f = 750.000,00\text{€}$ : Fixkosten,
- Produktionsmenge:  $x = X(v_1, v_2) = 5.300 \cdot \ln(v_1 + 1) + 3.600 \cdot \ln(v_2 + 1)$ ,
- $p = 12\text{€}$ : Verkaufspreis pro Stück von Gut X.

- (1) Stellen Sie den Gewinn als eine Funktion  $G(v_1, v_2)$  dar.
- (2) Bestimmen Sie die gewinnmaximalen Faktoreinsatzmengen, die gewinnmaximale Produktionsmenge und den maximalen Gewinn.

### Aufgabe 5

Eine Frau will sich die beiden Güter X und Y kaufen. Ihre Nutzenfunktion ist  $U(x, y) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ . Dabei ist x ist die Menge von Gut X, und y ist die Menge von Gut Y. Ein Stück von Gut X kostet  $p_x = 2\text{€}$ , und ein Stück von Gut Y kostet  $p_y = 1\text{€}$ . Die Frau möchte insgesamt 12€ ausgeben.

Bei welchen Mengen x und y ist ihr Nutzen maximal? (Sie brauchen die zweiten Ableitungen nicht zu prüfen.)

### Aufgabe 6

Wir haben die Lagrange-Funktion  $L(\lambda, x, y) = 3 \cdot x + 4 \cdot y - 5 - \lambda \cdot (x^2 - y - 1)$ . Aus  $L'_\lambda(\lambda, x, y) = 0$ ,  $L'_x(\lambda, x, y) = 0$  und  $L'_y(\lambda, x, y) = 0$  erfährt man, dass an der Stelle  $x = -\frac{3}{8}$ ,  $y = -\frac{55}{64}$  ein Minimum oder Maximum mit  $\lambda = -4$  sein kann. Prüfen Sie, ob an dieser Stelle ein Minimum oder ein Maximum ist.