Aufgaben: Minima und Maxima

Aufgabe 1

Bestimmen Sie sämtliche (lokalen und globalen) Minima und Maxima. Geben Sie auch die Tief- und Hochpunkte an.

(1) $f(x) = x^2 + x - 6 \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

(2) $f(x) = 4 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 4 \quad \mathbb{D}_f = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$

(3) $f(x) = e^x - 2 \cdot x \quad \mathbb{D}_f = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 8\}$

(4) $f(x) = 5 \cdot x + \ln(2 - x) \quad \mathbb{D}_f = \{x \in \mathbb{R} | x < 2\}$

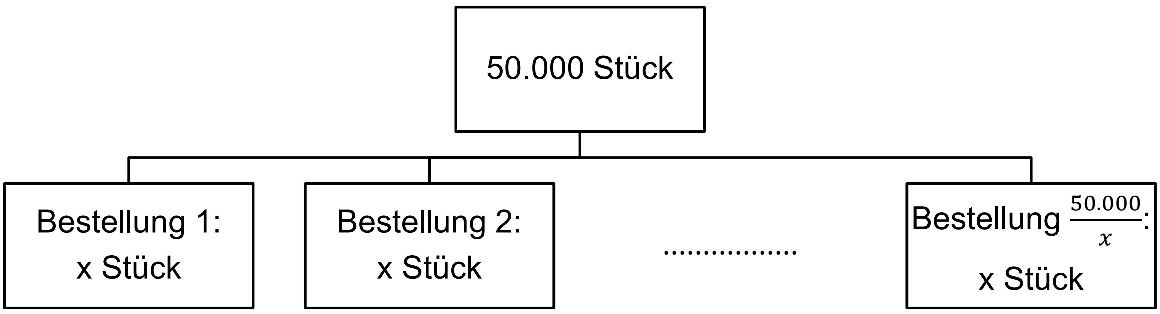
(5) $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 12 \cdot x^2 + 108 \cdot x - 6 \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

(6) $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^4 + 2 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

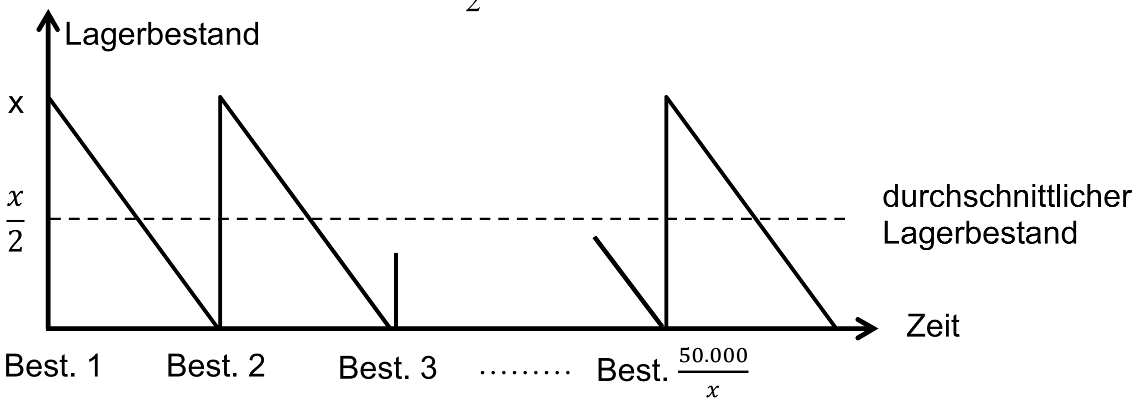
Aufgabe 2

Eine Firma muss pro Periode 50.000 Stück eines Produktes bestellen. Die 50.000 Stück sollen auf mehrere gleich große Bestellungen verteilt werden. Bei jeder Bestellung werden x Stück bestellt, und es entstehen Transportkosten. Ferner entstehen Lagerkosten für die Lagerung der bestellten Stücke:

1) Anzahl der Bestellungen: $\frac{50.000}{x}$, Transportkosten pro Bestellung $156{,}25€$



2) Durchschnittlicher Lagerbestand: $\frac{x}{2}$ Stück, Lagerkosten pro Stück: $10€$



Bei welcher Bestellmenge x sind die Gesamtkosten (Transportkosten + Lagerkosten) minimal? Wie viele Bestellungen müssen dann erfolgen?

Aufgabe 3

Der U.S.-amerikanische Ökonom Arthur Laffer stellte in den 70er Jahren die These auf, dass die Steuereinnahmen des Staates zurückgehen, wenn der Lohnsteuersatz zu weit erhöht wird. Bei einem Steuersatz von 0% hat der Staat keinerlei Steuereinnahmen. Gleichzeitig, so Laffer, habe der Staat bei einem Steuersatz von 100% ebenfalls keine Steuereinnahmen, da dann niemand mehr arbeiten wolle. Laffer folgerte daraus, dass die Höhe der Steuereinahmen eine Funktion $f(x)$ des Steuersatzes x sei. Diese Funktion hat Nullstellen bei $x=0$ und $x=100$. Es gibt einen Steuersatz $x_{\max} \in]0,100[$, bei dem die Steuereinahmen maximal sind.

Die Steuereinnahmen unserer Volkswirtschaft in Mrd. € seien durch eine Funktion $f(x) = 100 \cdot \ln(x+1) - \ln(101) \cdot x \quad \mathbb{D}_f = \{x \in \mathbb{R} | 0 \le x \le 100\}$ gegeben. Bestimmen Sie den Steuersatz x, bei dem die Steuereinnahmen maximal sind. Bestimmen Sie auch die maximalen Steuereinnahmen.

Aufgabe 4

Eine Firma unter vollständiger Konkurrenz hat die Kostenfunktion $K(x) = 1{,}005^x$. Dabei ist x die produzierte Menge, und p_x ist der Absatzpreis.

(1) Stellen Sie die Gewinnfunktion $G(x)$ auf.

(2) Ermitteln Sie die gewinnmaximale Produktionsmenge (in Abhängigkeit von p_x).

(3) Die Preisuntergrenze liegt bei $p_x = 0{,}01$€. Zeichnen Sie die Angebotsfunktion für $0{,}01€ \le p_x \le 6€$.

Aufgabe 5

Ein Monopolist habe die Kostenfunktion $K(x) = 20 + 10 \cdot x$, und die Preis-Absatz-Funktion sei $p_x = P(x) = 110 - x$.

(1) Bestimmen Sie die gewinnmaximale Verkaufsmenge und den zugehörigen Preis. Erstellen Sie auch eine Zeichnung.

(2) Wie groß wären Preis und Angebotsmenge bei vollständiger Konkurrenz?

